

Κεφάλαιο 4 – Γενικές Οδηγίες για το Numerical Reasoning Test

4.1 Εισαγωγή

Η επιτυχία στα τεστ αριθμητικής λογικής δεν εξαρτάται τόσο από τη δυσκολία των ίδιων των υπολογισμών, όσο από την ικανότητα του εξεταζόμενου να σκέφτεται σωστά, να οργανώνει τη σκέψη του και να χρησιμοποιεί τον χρόνο του αποδοτικά. Στα τεστ αυτού του είδους δεν απαιτούνται περίπλοκες μαθηματικές γνώσεις, αλλά η ικανότητα να εντοπίζεις τα στοιχεία που είναι πραγματικά χρήσιμα, να αγνοείς τις περιττές πληροφορίες και να βρίσκεις τον συντομότερο δρόμο προς τη σωστή απάντηση. Οι ερωτήσεις δεν δοκιμάζουν την εξειδίκευση στα μαθηματικά, αλλά την ικανότητα λογικής επεξεργασίας αριθμητικών δεδομένων μέσα σε περιορισμένο χρόνο.

Ο κόσμος των τεστ αριθμητικής λογικής είναι διαφορετικός από αυτόν της καθημερινής ζωής. Τα δεδομένα δεν δίνονται ποτέ σε «καθαρή» μορφή, αλλά συνήθως περιέχουν θόρυβο — δηλαδή επιπλέον πληροφορίες που δεν χρειάζονται. Ο πρώτος στόχος κάθε υποψηφίου είναι να ξεχωρίσει τι πρέπει να χρησιμοποιήσει και τι όχι. Μόνο έτσι μπορεί να γλιτώσει πολύτιμο χρόνο και να αποφύγει τη σύγχυση.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό αυτών των τεστ είναι ότι στηρίζονται σε βασικές μαθηματικές έννοιες — πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ποσοστά, λόγους και αναλογίες. Παρότι οι πράξεις αυτές είναι απλές, πολλοί υποψήφιοι τις βρίσκουν δύσκολες, επειδή έχουν χάσει την εξοικείωση με τέτοιου είδους υπολογισμούς. Ωστόσο, το επίπεδο μαθηματικής γνώσης που απαιτείται είναι απολύτως προσιτό σε όλους. Αυτό που χρειάζεται είναι εξάσκηση, προσοχή και σωστή μέθοδος.

Υπάρχουν διάφορα είδη τεστ αριθμητικής λογικής. Κάποια επικεντρώνονται στην ταχύτητα εκτέλεσης πράξεων, όπως οι ασκήσεις υπολογισμού απλών πράξεων (π.χ. “πόσο κάνει $(25 + 75) / 2$;”). Άλλα, πιο προχωρημένα, ελέγχουν την ικανότητα του υποψηφίου να εντοπίζει ποια πράξη πρέπει να κάνει και όχι απλώς να τη λύνει. Αυτά ονομάζονται τεστ εφαρμοσμένης λογικής, γιατί απαιτούν να μετατρέψουμε μια λεκτική περιγραφή σε μαθηματική σχέση. Για παράδειγμα: «Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 60

παιδιά. Τα διπλάσια θέλουν να παίξουν κρυφό απ' όσα θέλουν να πάνε σινεμά. Πόσα παιδιά θέλουν να πάνε σινεμά;». Εδώ το ζητούμενο δεν είναι ο υπολογισμός, αλλά η σωστή κατανόηση της σχέσης που κρύβεται πίσω από τα λόγια.

Υπάρχουν επίσης τεστ ερμηνείας δεδομένων, όπου οι πληροφορίες δίνονται σε μορφή πίνακα ή γραφήματος. Ο υποψήφιος καλείται να βγάλει ποσοστά, μέσους όρους ή μεταβολές, συνδυάζοντας τα στοιχεία που βλέπει. Για παράδειγμα, μπορεί να πρέπει να υπολογίσει «κατά πόσο αυξήθηκε το ποσοστό των αγγλόφωνων στην Ισπανία από το 2000 ως το 2010». Τέλος, υπάρχουν και τα τεστ εκτίμησης, όπου ζητείται να βρεθεί η προσέγγιση του αποτελέσματος χωρίς να χρειάζεται ακριβής υπολογισμός – για παράδειγμα, ότι $3,98 \times 997$ είναι περίπου 4000.

Ας δούμε πώς λειτουργεί η λογική ενός τέτοιου τεστ μέσα από ένα απλό παράδειγμα.

	Αριθμός τηλεοράσεων υψηλής ευκρίνειας (σε χιλιάδες)ς το 2010	Αριθμός τηλεοράσεων υψηλής ευκρίνειας (σε χιλιάδες)ς το 2020
Βέλγιο	880	1000
Σλοβακία	510	750
Ολλανδία	1002	1200
Ισπανία	1600	2500

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα για τον αριθμό τηλεοράσεων υψηλής ευκρίνειας (σε χιλιάδες) σε τέσσερις χώρες το 2010: Βέλγιο 880, Σλοβακία 510, Ολλανδία 1002 και Ισπανία 1600. Η ερώτηση είναι: «Ποιο ποσοστό του συνόλου των τηλεοράσεων αντιστοιχεί στο Βέλγιο;». Ο υποψήφιος πρέπει πρώτα να εντοπίσει ποια στοιχεία χρειάζεται – μόνο τη στήλη του 2010. Στη συνέχεια, αθροίζει τα δεδομένα: $880 + 510 + 1002 + 1600 = 3992$, που στρογγυλοποιείται εύκολα σε 4000. Τέλος, υπολογίζει το ποσοστό: $880 / 4000 = 0,22$, δηλαδή περίπου 22%. Η σωστή απάντηση είναι 22%, χωρίς να χρειαστεί περίπλοκος υπολογισμός. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι με σωστή στρατηγική και μικρές εκτιμήσεις μπορούμε να φτάσουμε στη λύση πολύ γρήγορα.

Το μυστικό της επιτυχίας είναι η εξάσκηση στην ταχύτητα και την ακρίβεια. Οι γρήγοροι νοητικοί υπολογισμοί είναι εξαιρετικά χρήσιμοι, όχι μόνο για να εξοικονομούμε χρόνο, αλλά και για να ελέγχουμε αν ένα αποτέλεσμα έχει λογική. Η

υπερβολική χρήση της αριθμομηχανής μπορεί να οδηγήσει σε λάθη, ειδικά αν δεν καταλαβαίνουμε τι πράγματι υπολογίζουμε. Ο στόχος είναι να αποκτήσουμε αυτοπεποίθηση στους υπολογισμούς και να αναπτύξουμε μια «διαίσθηση αριθμών» — μια αίσθηση του τι είναι σωστό ή πιθανό, πριν καν κάνουμε την πράξη.

Η επιτυχία στα τεστ αριθμητικής λογικής βασίζεται επομένως στη λογική σκέψη, στην ικανότητα εκτίμησης και στη σωστή διαχείριση του χρόνου. Δεν χρειάζεται να είσαι μαθηματικός· αρκεί να είσαι προσεκτικός, οργανωμένος και να σκέφτεσαι έξυπνα. Με λίγη πρακτική πάνω σε βασικές έννοιες, όπως τα ποσοστά, οι λόγοι, οι εκτιμήσεις και οι πίνακες δεδομένων, μπορείς να αναπτύξεις μια σταθερή μέθοδο που θα σε βοηθήσει να αντιμετωπίζεις κάθε άσκηση με σιγουριά.

Τελικά, αυτό που μετράει περισσότερο δεν είναι η ταχύτητα των πράξεων, αλλά η κατανόηση του προβλήματος και η ψυχραιμία. Ένας υποψήφιος που παραμένει ήρεμος, εντοπίζει τα σωστά δεδομένα και κάνει λογικές εκτιμήσεις, θα έχει πολύ καλύτερη απόδοση από κάποιον που προσπαθεί να υπολογίσει μηχανικά τα πάντα. Η αριθμητική λογική είναι περισσότερο θέμα αντίληψης και στρατηγικής παρά γνώσης. Και όπως σε κάθε δεξιότητα, η επιτυχία έρχεται μέσα από την εξάσκηση, την υπομονή και την αυτοπεποίθηση.

4.2 Περιγραφή του Numerical Test

Η δυσκολία στα τεστ αριθμητικής συλλογιστικής δεν βρίσκεται τόσο στο να βρει κανείς τη σωστή απάντηση, όσο στο να το καταφέρει μέσα σε πολύ λίγο χρόνο. Αυτά τα τεστ δεν απαιτούν περίπλοκα μαθηματικά, αλλά βασίζονται κυρίως στην ικανότητά μας να:

- ξεχωρίζουμε τις πληροφορίες που είναι ουσιαστικές για την ερώτηση μέσα από πολλές άλλες,
- βρίσκουμε τον πιο σύντομο και αποτελεσματικό τρόπο για να εξάγουμε την απάντηση,
- εντοπίζουμε πιθανούς «δρόμους» ή κόλπα που οδηγούν πιο γρήγορα στη λύση,
- κρίνουμε πόση ακρίβεια χρειάζεται για να διαλέξουμε τη σωστή επιλογή, και
- κάνουμε υπολογισμούς γρήγορα, στο μυαλό μας.

4.9 Απόλυτη & Σχετική Μεταβολή

Η **Απόλυτη** και η **Σχετική Μεταβολή** είναι έννοιες που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την αλλαγή μιας ποσότητας σε σχέση με κάποια άλλη χρονική στιγμή ή κατάσταση.

✓ Απόλυτη Μεταβολή

Η **απόλυτη μεταβολή** δείχνει πόσο **αυξήθηκε ή μειώθηκε** μια ποσότητα σε **απόλυτους αριθμούς** (π.χ. ευρώ, κιλά, μονάδες κ.λπ.).

Τύπος:

Απόλυτη Μεταβολή = Τελική Τιμή – Αρχική Τιμή

Παράδειγμα:

Ένας μισθός αυξήθηκε από 1000€ σε 1200€:

$$\text{Απόλυτη Μεταβολή} = 1200 - 1000 = 200\text{€}$$

✓ Σχετική Μεταβολή

Η **σχετική μεταβολή** εκφράζει την **απόλυτη μεταβολή ως ποσοστό (%)** της αρχικής τιμής. Δείχνει **την αναλογία της αλλαγής** σε σχέση με το αρχικό μέγεθος.

Τύπος:

$$\begin{aligned} \text{Σχετική μεταβολή (\%)} &= \frac{\text{Απόλυτη Μεταβολή}}{\text{Αρχική τιμή}} \times 100\% \\ &= \left(\frac{\text{Τελική τιμή}}{\text{Αρχική τιμή}} - 1 \right) \times 100\% \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Από το ίδιο παράδειγμα:

$$\text{Σχετική Μεταβολή} = (200/1000) \times 100\% = 20\%$$

Η **αρχική τιμή** και η **τελική τιμή** ορίζονται με **βάση το χρονικό σημείο ή την κατάσταση αναφοράς**. Δηλαδή:

✓ Αρχική Τιμή:

Η τιμή που υπήρχε πρώτα, δηλαδή πριν από κάποια αλλαγή.

✔ Τελική Τιμή:

Η τιμή που προέκυψε μετά την αλλαγή, δηλαδή μετά το χρονικό σημείο ή το γεγονός που μας ενδιαφέρει.

📅 Παράδειγμα με χρόνο:

Αν κάποιος είχε μισθό 1000€ το 2022 και τώρα έχει 1200€ το 2025:

- Αρχική τιμή: 1000€ (το 2022)
- Τελική τιμή: 1200€ (το 2025)

📦 Παράδειγμα με κατάσταση:

Ένα προϊόν είχε έκπτωση και η τιμή του έπεσε από 50€ στα 35€:

- Αρχική τιμή: 50€ (πριν την έκπτωση)
- Τελική τιμή: 35€ (μετά την έκπτωση)

👉 Χρήσιμη συμβουλή:

Εσύ ορίζεις ποια τιμή είναι "αρχική" ανάλογα με το τι θέλεις να συγκρίνεις. Αν αλλάξει κάτι ξανά στο μέλλον, τότε η "παλιά τελική τιμή" μπορεί να γίνει η νέα αρχική για μια καινούρια σύγκριση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Έτος	Πληθυσμός (χιλιάδες)	ΑΕΠ (δισ. €)
2010	9.500	180
2015	10.000	200
2020	10.500	210
2025	11.000	250

Ποια είναι η απόλυτη μεταβολή του ΑΕΠ της χώρας από το 2015 έως το 2020, σε εκατομμύρια ευρώ;

- A. 500 εκατομμύρια €
- B. 1.000 εκατομμύρια €
- C. 5.000 εκατομμύρια €
- D. 10.000 εκατομμύρια €
- E. 100.000 εκατομμύρια €

 Ερμηνεία Δεδομένων (Data Interpretation)

Από τον πίνακα παίρνουμε:

- ΑΕΠ το 2015 = 200 δισ. €
- ΑΕΠ το 2020 = 210 δισ. €

 Βήματα Λύσης

Για να υπολογίσουμε την **απόλυτη μεταβολή** του ΑΕΠ:

Απόλυτη Μεταβολή = Τελική Τιμή – Αρχική Τιμή

Πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τα δισεκατομμύρια σε **εκατομμύρια ευρώ** για να βρούμε τη σωστή μονάδα.

 Υπολογισμός:

$210.000.000.000 - 200.000.000.000 = 10.000.000.000$ (€) = 10.000 εκατομμύρια €

 Τελική Απάντηση: **D. 10.000 εκατομμύρια €**

 Πιθανά Λάθη

- **Μονάδες:** Μην ξεχνάς να μετατρέπεις τα δισεκατομμύρια σε εκατομμύρια πριν δώσεις απάντηση.
- **Αναγραφή μονάδας:** Η απάντηση ζητείται σε **εκατομμύρια €**, όχι σε δισ. € ή ποσοστά.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Χώρα	ΑΕΠ 2010 (δισ. €)	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ελλάδα	220	185	200
Ιταλία	1.600	1.650	1.700
Ισπανία	1.100	1.200	1.250
Γαλλία	2.100	2.200	2.300
Πορτογαλία	180	190	210

Ποια χώρα παρουσίασε τη μεγαλύτερη απόλυτη αύξηση του ΑΕΠ από το 2015 έως το 2020;

- A. Ισπανία
- B. Πορτογαλία
- C. Ιταλία
- D. Γαλλία
- E. Ελλάδα

Βήματα Λύσης

Για να βρούμε ποια χώρα παρουσίασε τη μεγαλύτερη απόλυτη αύξηση του ΑΕΠ, πρέπει να κάνουμε αφαίρεση για κάθε χώρα:

Απόλυτη Μεταβολή = ΑΕΠ 2020 – ΑΕΠ 2015

Υπολογισμοί (σε δισ. € και μετατροπή σε εκατ. €):

Χώρα	Υπολογισμός	Απόλυτη Μεταβολή (σε εκατ. €)
Ελλάδα	$200 - 185 = 15$	15.000
Ιταλία	$1.700 - 1.650 = 50$	50.000
Ισπανία	$1.250 - 1.200 = 50$	50.000
Γαλλία	$2.300 - 2.200 = 100$	100.000

Χώρα	Υπολογισμός	Απόλυτη Μεταβολή (σε εκατ. €)
Πορτογαλία	$210 - 190 = 20$	20.000

✓ Τελική Απάντηση:

D. Γαλλία

🧠 Επεξήγηση:

Η Γαλλία είχε τη μεγαλύτερη αύξηση του ΑΕΠ από 2.200 δισ. € σε 2.300 δισ. €, δηλαδή 100 δισ. €, που ισοδυναμεί με 100.000 εκατομμύρια ευρώ. Καμία άλλη χώρα δεν είχε τόσο μεγάλη απόλυτη μεταβολή στο ίδιο διάστημα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ελλάδα	185	200
Ιταλία	1.650	1.700
Ισπανία	1.200	1.250
Γαλλία	2.200	2.300
Πορτογαλία	190	210

Ποια χώρα παρουσίασε τη μεγαλύτερη σχετική (ποσοστιαία) αύξηση του ΑΕΠ από το 2015 έως το 2020;

- A. Ιταλία
- B. Πορτογαλία
- C. Ισπανία
- D. Γαλλία
- E. Ελλάδα

✔ **Βήματα Λύσης**

Για να βρούμε ποια χώρα παρουσίασε τη **μεγαλύτερη σχετική (ποσοστιαία) αύξηση**, χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\text{Σχετική Μεταβολή (\%)} = [(ΑΕΠ\ 2020 - ΑΕΠ\ 2015) / ΑΕΠ\ 2015] \times 100$$

Υπολογισμοί:

Χώρα	Υπολογισμός	Σχετική Μεταβολή (%)
Ελλάδα	$(200 - 185) / 185 \times 100 = 15 / 185 \times 100$	$\approx 8,11\%$
Ιταλία	$(1700 - 1650) / 1650 \times 100 = 50 / 1650 \times 100$	$\approx 3,03\%$
Ισπανία	$(1250 - 1200) / 1200 \times 100 = 50 / 1200 \times 100$	$\approx 4,17\%$
Γαλλία	$(2300 - 2200) / 2200 \times 100 = 100 / 2200 \times 100$	$\approx 4,55\%$
Πορτογαλία	$(210 - 190) / 190 \times 100 = 20 / 190 \times 100$	$\approx 10,53\%$

✔ **Τελική Απάντηση:**

Β. Πορτογαλία

🧠 **Επεξήγηση:**

Η Πορτογαλία είχε την **μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση** στο ΑΕΠ της από 190 δισ. € σε 210 δισ. €, που ισοδυναμεί με αύξηση περίπου **10,53%**. Καμία άλλη χώρα δεν παρουσίασε τόσο μεγάλη **σχετική μεταβολή** στο ίδιο διάστημα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ελλάδα	185	200

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ιταλία	1.650	1.700
Ισπανία	1.200	1.250
Γαλλία	2.200	2.300
Πορτογαλία	190	210

Στην Ελλάδα, ποια είναι η ποσοστιαία αύξηση του κατά κεφαλήν ΑΕΠ από το 2015 έως το 2020; Ο πληθυσμός παραμένει σταθερός.

✓ Βήματα Λύσης:

Για να υπολογίσουμε την ποσοστιαία αύξηση του **κατά κεφαλήν ΑΕΠ**, πρέπει να γνωρίζουμε και τον **πληθυσμό** της Ελλάδας το 2015 και το 2020. Αν υποθέσουμε ότι ο **πληθυσμός παρέμεινε σταθερός**, τότε η **ποσοστιαία αύξηση του κατά κεφαλήν ΑΕΠ είναι ίση με την ποσοστιαία αύξηση του συνολικού ΑΕΠ**.

Υπολογισμός:

$$\text{Ποσοστιαία Αύξηση} = \left(\frac{200 - 185}{185} \right) \times 100 = \left(\frac{15}{185} \right) \times 100 \approx 8,11\%$$

✓ Τελική Απάντηση:

Η ποσοστιαία αύξηση του κατά κεφαλήν ΑΕΠ στην Ελλάδα από το 2015 έως το 2020 είναι περίπου 8,11%.

🧠 Επεξήγηση:

Εφόσον δεν υπάρχουν στοιχεία για μεταβολή του πληθυσμού, θεωρούμε ότι ο πληθυσμός παρέμεινε σταθερός. Άρα, η μεταβολή του κατά κεφαλήν ΑΕΠ είναι ίδια με τη συνολική ποσοστιαία μεταβολή του ΑΕΠ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ελλάδα	185	200
Ιταλία	1.650	1.700
Ισπανία	1.200	1.250
Γαλλία	2.200	2.300
Πορτογαλία	190	210

Στην Ελλάδα, ποια είναι η ποσοστιαία αύξηση του κατά κεφαλήν ΑΕΠ από το 2015 έως το 2020; Ο πληθυσμός ανάμεσα στο 2015 και 2020 αυξάνεται κατά 10%.

- A. +10,0%
- B. +5,2%
- C. -1,72%
- D. -5,0%
- E. +8,1%

Βήματα Λύσης:

Βήμα 1: Υπολογισμός κατά κεφαλήν ΑΕΠ

Έστω ότι ο πληθυσμός της Ελλάδας το 2015 είναι P. Τότε το 2020 είναι:

$$P_{2020} = P + 10\% \cdot P = 1.10P$$

Κατά κεφαλήν ΑΕΠ το 2015:

$$\text{Κατά κεφαλήν ΑΕΠ}_{2015} = \frac{185}{P}$$

Κατά κεφαλήν ΑΕΠ το 2020:

$$\text{Κατά κεφαλήν ΑΕΠ}_{2020} = \frac{200}{1.10P} = \frac{200}{1.10 \cdot P}$$

Βήμα 2: Υπολογισμός ποσοστιαίας μεταβολής

$$\text{Ποσοστιαία Μεταβολή} = \left(\frac{\text{ΑΕΠ}_{2020 \text{ per capita}} - \text{ΑΕΠ}_{2015 \text{ per capita}}}{\text{ΑΕΠ}_{2015 \text{ per capita}}} \right) \cdot 100$$

Αντικαθιστούμε:

$$\text{Ποσοστιαία Μεταβολή} = \left(\frac{\frac{200}{1.10P} - \frac{185}{P}}{\frac{185}{P}} \right) \cdot 100$$

Απλοποιούμε:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\frac{200}{1.10} - 185}{185} \right) \cdot 100 \\ &= \left(\frac{181.82 - 185}{185} \right) \cdot 100 \\ &= \left(\frac{-3.18}{185} \right) \cdot 100 \approx -1.72\% \end{aligned}$$

Σωστή απάντηση: C. -1,72%

ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για το ΑΕΠ (σε δισ. €) πέντε ευρωπαϊκών χωρών:

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ελλάδα	185	200
Ιταλία	1.650	1.700
Ισπανία	1.200	1.250
Γαλλία	2.200	2.300

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Πορτογαλία	190	210

Αν το κατά κεφαλήν ΑΕΠ στην Ισπανία παραμένει σταθερό μεταξύ του 2015 και του 2020, και το κατά κεφαλήν ΑΕΠ της Ισπανίας το 2015 ήταν περίπου **25.000 €**. Ποια είναι η απόλυτη μεταβολή του πληθυσμού της Ισπανίας κατά την ίδια περίοδο;

- A. 0,5 εκατομμύρια
- B. 1,2 εκατομμύρια
- C. 2,0 εκατομμύρια
- D. 3,1 εκατομμύρια
- E. 4,5 εκατομμύρια

Χώρα	ΑΕΠ 2015 (δισ. €)	ΑΕΠ 2020 (δισ. €)
Ισπανία	1.200	1.250

Μας δίνεται ότι το **κατά κεφαλήν ΑΕΠ παραμένει σταθερό** από το 2015 έως το 2020. Ζητείται η **απόλυτη μεταβολή του πληθυσμού** της Ισπανίας.

Βήμα 1: Τι σημαίνει “σταθερό κατά κεφαλήν ΑΕΠ”;

Η σταθερότητα του κατά κεφαλήν ΑΕΠ σημαίνει:

$$\frac{\text{ΑΕΠ}_{2015}}{\text{Πληθυσμός}_{2015}} = \frac{\text{ΑΕΠ}_{2020}}{\text{Πληθυσμός}_{2020}}$$

Άρα:

$$\frac{1.200}{P_{2015}} = \frac{1.250}{P_{2020}}$$

Βήμα 2: Εκφράζουμε τον πληθυσμό του 2020

Λύνουμε ως προς P_{2020}

$$P_{2020} = P_{2015} \cdot \frac{1.250}{1.200} = P_{2015} \cdot \frac{25}{24}$$

Δηλαδή, ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά:

$$\Delta P = P_{2020} - P_{2015} = P_{2015} \cdot \left(\frac{25}{24} - 1 \right) = P_{2015} \cdot \frac{1}{24}$$

Βήμα 3: Εκτιμούμε τον πληθυσμό της Ισπανίας το 2015

Για να βρούμε απόλυτη τιμή, χρησιμοποιούμε ρεαλιστική εκτίμηση:

Το κατά κεφαλήν ΑΕΠ της Ισπανίας γύρω στο 2015 ήταν περίπου **25.000 €**.

Άρα:

$$P_{2015} = \frac{\text{ΑΕΠ}_{2015}}{\text{Κατά κεφαλήν ΑΕΠ}} = \frac{1.200.000.000.000}{25.000} = 48.000.000 \text{ κάτοικοι}$$

Βήμα 4: Υπολογισμός της απόλυτης μεταβολής

$$\Delta P = \frac{1}{24} \cdot 48.000.000 = 2.000.000 \text{ κάτοικοι}$$

Η απόλυτη μεταβολή του πληθυσμού στην Ισπανία από το 2015 έως το 2020, εφόσον το κατά κεφαλήν ΑΕΠ παραμένει σταθερό, είναι περίπου:

C. 2,0 εκατομμύρια

Mini Test – Μεταβολές (Απόλυτη & Σχετική)

◆ Οδηγίες

Το τεστ αυτό περιλαμβάνει **10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (A–E)**. Κάθε ερώτηση απαιτεί να σκεφτείς τη σχέση μεταξύ αρχικής και τελικής τιμής, να υπολογίσεις την **απόλυτη ή σχετική μεταβολή** και να επιλέξεις τη σωστή απάντηση.

■ Οδηγίες εκτέλεσης:

- Μην χρησιμοποιήσεις κομπιουτεράκι.
- Κάνε πρώτα νοητική εκτίμηση για να δεις αν η απάντηση είναι λογική.
- Κράτησε χρόνο **5 λεπτών** (περίπου 30 δευτερόλεπτα ανά ερώτηση).
- Δούλεψε ήρεμα και προσπάθησε να κατανοήσεις τη **λογική της μεταβολής**.

🧠 Ερωτήσεις

1

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε από **80€** σε **92€**.

Ποια είναι η **απόλυτη μεταβολή**;

A) 10€ B) 12€ C) 14€ D) 15€ E) 20€

2

Ένα απόθεμα μειώθηκε από **200** σε **170** μονάδες.

Ποια είναι η **σχετική μεταβολή**;

A) -10% B) -12,5% C) -15% D) -20% E) -30%

3

Η τελική τιμή είναι **345€** μετά από αύξηση **15%**.

Ποια ήταν η **αρχική τιμή**;

A) 295€ B) 300€ C) 310€ D) 320€ E) 345€

4

Μια ποσότητα αυξάνεται κατά **20%** και μετά μειώνεται κατά **20%**.

Η συνολική μεταβολή είναι:

- A) 0% B) -2% C) -4% D) -8% E) -10%
-

5

Ο πληθυσμός αυξάνεται από **2,4 εκ.** σε **2,7 εκ.** και το κατά κεφαλήν εισόδημα από **20.000€** σε **21.000€**.

Πόση είναι η **ποσοστιαία μεταβολή του συνολικού εισοδήματος;**

- A) 12,5% B) 15,0% C) 18,1% D) 20,0% E) 21,5%
-

6

Δείκτης τιμών:

2019 = 100 2024 = 120 2025 = 114

Η μεταβολή **από 2024 σε 2025** είναι:

- A) -4% B) -5% C) -6% D) -8% E) -10%
-

7

Πωλήσεις (σε χιλιάδες μονάδες):

Εταιρεία A: 300 → 360 Εταιρεία B: 200 → 180

Ποια είναι η **συνολική ποσοστιαία μεταβολή πωλήσεων;**

- A) 6% B) 8% C) 10% D) 12% E) 15%
-

8

Μια επένδυση αυξάνεται από **100€** σε **121€** μέσα σε **3 χρόνια**.

Ποιος είναι ο **μέσος ετήσιος ρυθμός μεταβολής (CAGR);**

- A) 5,0% B) 6,0% C) 6,5% D) 7,0% E) 8,0%
-

9

Μια τιμή μειώθηκε κατά **12%** και έγινε **308€**.

Ποια ήταν η **αρχική τιμή**;

A) 340€ B) 345€ C) 350€ D) 355€ E) 360€

10

Ένα «καλάθι αγαθών» αποτελείται από δύο ομάδες:

Ομάδα A (60%) αυξήθηκε **10%**, Ομάδα B (40%) αυξήθηκε **5%**.

Ποια είναι η **συνολική ποσοστιαία μεταβολή** του καλαθιού;

A) 6,5% B) 7,0% C) 8,0% D) 8,5% E) 9,0%

Απαντήσεις

1

Απόλυτη μεταβολή = $92 - 80 = 12€$

✓ Σωστή απάντηση: **B) 12€**

2

Σχετική μεταβολή = $(170 - 200)/200 \times 100 = -15\%$

✓ Σωστή απάντηση: **C) -15%**

3

Αύξηση 15% → Τελική = $1,15 \times$ Αρχική → $345 = 1,15x \rightarrow x = 300€$

✓ Σωστή απάντηση: **B) 300€**

4

Αύξηση 20% $\rightarrow 1,20 \times$ Μείωση 20% $\rightarrow 0,80$

$1,20 \times 0,80 = 0,96 \rightarrow$ Συνολική μεταβολή -4%

✓ Σωστή απάντηση: **C) -4%**

5

Συνολικό εισόδημα = Πληθυσμός \times Κατά κεφαλήν

2015: $2,4 \times 20.000 = 48.000$

2020: $2,7 \times 21.000 = 56.700$

$(56.700 - 48.000)/48.000 = 18,1\%$

✓ Σωστή απάντηση: **C) $18,1\%$**

6

$(114 - 120)/120 = -6/120 = -5\%$

✓ Σωστή απάντηση: **B) -5%**

7

Σύνολο 2015: 500 \rightarrow 2020: 540 $\rightarrow +40/500 = 8\%$

✓ Σωστή απάντηση: **B) 8%**

8

$CAGR = (121/100)^{(1/3)} - 1 \approx 6,5\%$

✓ Σωστή απάντηση: **C) $6,5\%$**

9

$0,88x = 308 \rightarrow x = 350$

✓ Σωστή απάντηση: **C) 350€**

10

Συνδυασμένη μεταβολή = $0,6 \times 10\% + 0,4 \times 5\% = 6 + 2 = 8\%$

✓ Σωστή απάντηση: C) 8%

4.10 Υπολογισμός κατά κεφαλήν μεγεθών

Ο όρος "κατά κεφαλήν" σημαίνει "ανά άτομο". Χρησιμοποιείται για να μοιράσουμε ένα σύνολο ισομερώς στον πληθυσμό.

Γενικός Τύπος Υπολογισμού

$$\text{Κατά κεφαλήν τιμή} = \frac{\text{Συνολικό μέγεθος}}{\text{Αριθμός ατόμων (πληθυσμός)}}$$

♦ Παράδειγμα 1: Κατά κεφαλήν εισόδημα

Σε μια χώρα το συνολικό εθνικό εισόδημα είναι 200 δισεκατομμύρια ευρώ και ο πληθυσμός είναι 10 εκατομμύρια άνθρωποι. Ποιο είναι το κατά κεφαλήν εισόδημα;

Λύση:

$$200.000.000.000 / 10.000.000 = 20.000 \text{ ευρώ}$$

➔ Άρα, το κατά κεφαλήν εισόδημα είναι 20.000 ευρώ.

♦ Παράδειγμα 2: Κατά κεφαλήν κατανάλωση ενέργειας

Μια πόλη καταναλώνει 3.000.000 kWh ενέργειας το χρόνο. Ο πληθυσμός είναι 50.000 κάτοικοι. Πόση ενέργεια καταναλώνει κατά μέσο όρο κάθε άτομο;

Λύση:

$$3.000.000 / 50.000 = 60 \text{ kWh}$$

➔ Άρα, η κατά κεφαλήν κατανάλωση είναι 60 kWh ανά κάτοικο.

Σε κάποιες ασκήσεις είναι πιθανό να γνωρίζουμε το κατά κεφαλήν μέγεθος και θα πρέπει να εκτιμήσουμε το συνολικό μέγεθος ή τον πληθυσμό. Στις περιπτώσεις αυτές ο τύπος θα λαμβάνει την παρακάτω μορφή.

1. Αν γνωρίζω το κατά κεφαλήν μέγεθος και τον πληθυσμό, υπολογίζω το συνολικό μέγεθος ως εξής:

$$\text{Συνολικό μέγεθος} = \text{κατά κεφαλήν μέγεθος} \times \text{πληθυσμός}$$

2. Αν γνωρίζω το κατά κεφαλήν μέγεθος και το συνολικό μέγεθος, υπολογίζω τον πληθυσμό ως εξής:

$$\text{Πληθυσμός} = \frac{\text{Συνολικό μέγεθος}}{\text{Κατά κεφαλήν μέγεθος}}$$

⚠ Συμβουλές για τις εξετάσεις:

- Πρόσεξε τις μονάδες (π.χ. ευρώ, kWh, λίτρα κ.λπ.).
- Αν σου ζητείται κατά κεφαλήν ποσοστό ή αξία ανά 1000 κατοίκους, πολλαπλασίασε/διαίρεσε ανάλογα.
- Αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι, μπορεί να σου ζητείται προσέγγιση (π.χ. κατά προσέγγιση νούμερο).

Στο πλαίσιο της παρούσας ενότητας, ακολουθεί μια σειρά ερωτήσεων που στοχεύουν στην εις βάθος κατανόηση του θέματος. Κάθε ερώτηση συνοδεύεται από αναλυτική απάντηση, βασισμένη σε τεκμηριωμένες πληροφορίες, θεωρητικά στοιχεία και πρακτικά παραδείγματα, με σκοπό τη σφαιρική προσέγγιση και την πληρέστερη κατανόηση των ζητημάτων που τίθενται.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Αν η μέση τιμή ελαιόλαδου το 2021 ήταν 4,50 € ανά κιλό, ποιος ήταν ο κατά κεφαλήν τζίρος ελαιόλαδου για την Ελλάδα εκείνη τη χρονιά;

Έτος	Παραγωγή Ελαιόλαδου (χιλ. τόνοι)	Πληθυσμός (εκατομμύρια)
2018	265	10.72
2019	185	10.71
2020	275	10.70
2021	310	10.68
2022	295	10.67

- A. €104,20
- B. €116,55
- C. €130,68
- D. €145,80
- E. €174,20

 **Βήματα Λύσης:**

 **Τι χρειαζόμαστε:**

- Παραγωγή ελαιόλαδου το **2021** → **310** χιλιάδες τόνοι
- Πληθυσμός Ελλάδας το **2021** → **10.68** εκατομμύρια άτομα
- Μέση τιμή: **4,50 €** ανά κιλό

 **Υπολογισμός:**

Βήμα 1: Μετατρέπουμε την παραγωγή από χιλ. τόνους → κιλά

$$310 \text{ χιλ. τόνοι} = 310.000 \text{ τόνοι} = 310.000.000 \text{ κιλά}$$

Βήμα 2: Κατά κεφαλήν παραγωγή (κιλά ανά άτομο)

$$310.000.000 / 10.680.000 \approx 29,04 \text{ κιλά ανά άτομο}$$

Βήμα 3: Πολλαπλασιάζουμε με τη μέση τιμή για να βρούμε τον κατά κεφαλήν τζίρο

$$29,04 \times 4,50 = 130,68 \text{ €}$$

✓ **Απάντηση:**

Η Ελλάδα παρήγαγε ελαιόλαδο αξίας περίπου **130,68 € ανά άτομο** το 2021.

⚠ **Προσοχή στα εξής:**

- Μην χρησιμοποιήσεις λάθος έτος.
- Μη μετατρέπεις τις μονάδες αν δεν χρειάζεται (χιλ. τόνοι με εκατομμύρια πληθυσμού = ίδια τάξη μεγέθους).
- Πρόσεξε αν η ερώτηση ζητά κατά κεφαλήν παραγωγή ή κατά κεφαλήν τζίρο – είναι διαφορετικά!

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

- Ποιος ήταν ο συνολικός κατά κεφαλήν τζίρος από ελαιόλαδο και κρασί στην Ισπανία το 2019 αν οι τιμές ήταν:

Ελαιόλαδο: 4,00 €/kg

Κρασί: 1,20 €/litre



Έτος	Ελαιόλαδο (χιλ. τόνοι)	Κρασί (χιλ. τόνοι)	Πληθυσμός (εκατ.)
2018	1450	4200	46.66
2019	1250	4050	47.10
2020	1600	4000	47.35
2021	1550	4150	47.50
2022	1500	4250	47.75

- A. €72,30
- B. €85,65
- C. €92,50
- D. €209,24
- E. €105,20

 **Βήματα Λύσης:**

 **Τι χρειαζόμαστε:**

- Ελαιόλαδο: 1.250.000 τόνοι = 1.250.000.000 κιλά
- Κρασί: 4.050.000 τόνοι = 4.050.000.000 λίτρα
- Πληθυσμός: 47.100.000
- Τιμές:
 - Ελαιόλαδο: 4,00 €/kg
 - Κρασί: 1,20 €/litre

 **Υπολογισμός:**

Βήμα 1: Κατά κεφαλήν παραγωγή

- *Ελαιόλαδο:*

$1.250.000.000 / 47.100.000 \approx 26,55$ κιλά ανά άτομο

- Κρασί:

$4.050.000.000/47.100.000 \approx 85,87$ λίτρα ανά άτομο

Βήμα 2: Κατά κεφαλήν τζίρος

- Ελαιόλαδο:

$26,55 \times 4,00 = 106,20$ €

- Κρασί:

$85,87 \times 1,20 = 103,04$ €

Βήμα 3: Συνολικός κατά κεφαλήν τζίρος

$106,20 + 103,04 = 209,24$ €

Απάντηση:

Ο συνολικός κατά κεφαλήν τζίρος από ελαιόλαδο και κρασί το 2019 ήταν περίπου **209,24 €**.

Τελική απάντηση: D.

Προσοχή στα εξής:

- Μετατροπές μονάδων: **τόνοι** → **κιλά / λίτρα**
- **Μη μπερδεύεις τιμή ανά λίτρο με τιμή ανά κιλό**
- Βεβαιώσου ότι προσθέτεις **τζίρους**, όχι απλώς ποσότητες
- **Μη χρησιμοποιήσεις λάθος έτος!**

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Ποιο από τα παρακάτω υποθετικά σενάρια θα οδηγήσει με βεβαιότητα σε αύξηση της κατά κεφαλήν παραγωγής ελαιόλαδου;

- A. Μείωση της παραγωγής ελαιόλαδου και μείωση του πληθυσμού
- B. Μείωση της παραγωγής ελαιόλαδου και αύξηση του πληθυσμού
- C. Αύξηση της παραγωγής ελαιόλαδου και μείωση του πληθυσμού
- D. Αύξηση της παραγωγής ελαιόλαδου και αύξηση του πληθυσμού
- E. Καμία αλλαγή στην παραγωγή και αύξηση του πληθυσμού

 **Ερμηνεία Δεδομένων**

Ο υπολογισμός της **κατά κεφαλήν παραγωγής ελαιόλαδου** γίνεται με τον τύπο:

$$\text{Κατά κεφαλήν παραγωγή} = \frac{\text{Συνολική παραγωγή ελαιόλαδου}}{\text{Πληθυσμός}}$$

Εφόσον δεν δίνονται ακριβείς αριθμοί, πρέπει να αξιολογήσουμε πώς επηρεάζουν το κλάσμα οι μεταβολές στον αριθμητή (παραγωγή) και τον παρονομαστή (πληθυσμός).

 **Ανάλυση Επιλογών**

- **A. Μείωση παραγωγής & μείωση πληθυσμού**
 - ▶ Και ο αριθμητής και ο παρονομαστής μειώνονται. Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν η αναλογία αυξάνεται ή μειώνεται χωρίς συγκεκριμένους αριθμούς. ❌
- **B. Μείωση παραγωγής & αύξηση πληθυσμού**
 - ▶ Μικρότερη παραγωγή, μεγαλύτερος πληθυσμός → η αναλογία σίγουρα μειώνεται. ❌
- **C. Αύξηση παραγωγής & μείωση πληθυσμού**
 - ▶ Ο αριθμητής αυξάνεται και ο παρονομαστής μειώνεται → και τα δύο οδηγούν με σιγουριά σε **αύξηση** της κατά κεφαλήν παραγωγής. ✅
- **D. Αύξηση παραγωγής & αύξηση πληθυσμού**
 - ▶ Και οι δύο αυξάνονται. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από το ποιο αυξάνεται περισσότερο. Δεν είναι σίγουρο. ❌

- Ε. Καμία αλλαγή στην παραγωγή & αύξηση πληθυσμού
 - ▶ Η παραγωγή μένει σταθερή, ενώ ο πληθυσμός αυξάνεται → η αναλογία μειώνεται. ✗

⚠ Πιθανές Παγίδες / Συμβουλές

- Οι επιλογές **A και D** θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αύξηση, **αλλά όχι με βεβαιότητα**, γιατί εξαρτώνται από ποσοστά.
- Η **C** είναι η **μόνη επιλογή** που οδηγεί με βεβαιότητα σε αύξηση, γιατί και η αύξηση του αριθμητή **και** η μείωση του παρονομαστή ενισχύουν την αναλογία.
- Αν καταλάβεις γρήγορα ποια είναι η σωστή (C), **μην χάνεις χρόνο ελέγχοντας τις υπόλοιπες** – κάτι σημαντικό για τεστ με χρονικό περιορισμό.

☑ Τελική απάντηση: C. Αύξηση παραγωγής και μείωση πληθυσμού

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Χώρα	Πληθυσμός (εκατομμύρια)	Κατά κεφαλήν κατανάλωση γάλακτος (λίτρα/έτος)
Ελλάδα	10,5	55
Ιταλία	59,3	48
Γαλλία	67,5	60
Ολλανδία	17,4	85
Γερμανία	83,2	70

Ποια είναι η συνολική ετήσια κατανάλωση γάλακτος στην Ολλανδία, σε χιλιάδες κυβικά μέτρα (m^3);

- A. 14.790.000 m³
- B. 1.479.000 m³
- C. 147.900 m³
- D. 1.479 m³
- E. 14,79 m³

 **Υπολογισμός:**

Βήμα 1: Υπολογισμός συνολικής κατανάλωσης σε λίτρα

Πληθυσμός Ολλανδίας=17,4 εκατομμύρια=17.400.000 άτομα

Κατά κεφαλήν κατανάλωση=85 λίτρα/άτομο/έτος

Συνολική κατανάλωση σε λίτρα=17.400.000×85=1.479.000.000 λίτρα

Βήμα 2: Μετατροπή λίτρων σε κυβικά μέτρα (m³)

$$1.000 \text{ λίτρα} = 1 \text{ m}^3 \Rightarrow \frac{1.479.000.000}{1.000} = 1.479.000 \text{ m}^3$$

Βήμα 3: Μετατροπή σε χιλιάδες m³

$$\frac{1.479.000}{1.000} = 1.479 \text{ χιλιάδες m}^3$$

Σωστή απάντηση: D. 1.479 m³

 **Πιθανές Παγίδες:**

1. Σύγχυση μονάδων μέτρησης:

- Η κατανάλωση δίνεται σε **λίτρα**, αλλά ζητείται απάντηση σε **χιλιάδες κυβικά μέτρα (m³)**.
- Μην ξεχάσεις:

$$1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ λίτρα και } 1.000 \text{ m}^3 = 1 \text{ χιλιάδα m}^3$$

2. **Λανθασμένος υπολογισμός πληθυσμού:**

- Ο πληθυσμός δίνεται σε εκατομμύρια, οπότε πολλαπλασιάζουμε με 1.000.000, π.χ. 17,4 → 17.400.000.

3. **Μη ολοκλήρωση μετατροπών:**

- Μερικοί σταματούν αφού βρουν τα λίτρα ή τα m^3 , χωρίς να κάνουν την τελευταία μετατροπή σε χιλιάδες m^3 , όπως απαιτείται.

4. **Επιφανειακή ανάγνωση των απαντήσεων:**

- Οι επιλογές περιλαμβάνουν παρόμοιους αριθμούς με διαφορετικές μονάδες (π.χ. m^3 , χιλιάδες m^3), που μπορεί να οδηγήσουν σε βιαστική και λάθος επιλογή.

Χρήσιμες Συμβουλές:

- **Ξεκίνα πάντα με καθαρή αναγραφή των μονάδων σε κάθε βήμα.**
- **Κάνε διαδοχικούς ελέγχους μετατροπών**, ειδικά όταν περιλαμβάνεται κυβισμός ή "κατά κεφαλήν" τιμές.
- **Αν μια ερώτηση έχει πολύ παρόμοιες αριθμητικές επιλογές, διπλοέλεγε την τελική μονάδα που ζητείται.**
- **Αν επιτρέπεται, χρησιμοποίησε πρόχειρους υπολογισμούς για να επιβεβαιώσεις το μέγεθος του αποτελέσματος** — για παράδειγμα, αν καταναλώνονται δισεκατομμύρια λίτρα, το αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι π.χ. 14,79 m^3 (τελείως μη ρεαλιστικό).

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Κατανάλωση Ενέργειας ανά Χώρα (σε δισεκατομμύρια kWh)			
Χώρα	2020	2021	2022
Ελλάδα	56	58	59

Κατανάλωση Ενέργειας ανά Χώρα (σε δισεκατομμύρια kWh)			
Χώρα	2020	2021	2022
Ιταλία	312	315	318

Κατανάλωση Ενέργειας ανά Κάτοικο (σε kWh ανά άτομο)			
Χώρα	2020	2021	2022
Ελλάδα	5.360	5.430	5.470
Ιταλία	5.290	5.270	5.250

Ποια ήταν η διαφορά πληθυσμού μεταξύ της Ιταλίας και της Ελλάδας το 2022;

- A. 49.785.041
- B. 10.560.000
- C. 1.050.000
- D. 10.500.000
- E. 2.120.000

 Λύση Βήμα-Βήμα:

 Τι χρειαζόμαστε:

- Κατανάλωση ενέργειας για Ελλάδα (2022): **59 δισ. kWh**
- Κατανάλωση ανά κάτοικο Ελλάδα (2022): **5.470 kWh**
- Κατανάλωση ενέργειας για Ιταλία (2022): **318 δισ. kWh**
- Κατανάλωση ανά κάτοικο Ιταλία (2022): **5.250 kWh**

 Υπολογισμός:

Βήμα 1: Πληθυσμός Ελλάδας

$59.000.000.000 / 5.470 \approx 10.786.388$ κάτοικοι

Βήμα 2: Πληθυσμός Ιταλίας

318.000.000.0005.250≈60.571.429 κάτοικοι

Βήμα 3: Διαφορά πληθυσμού

60.571.429–10.786.388≈49.785.041

✔ Σωστή Απάντηση: **A. 49.785.041**

⚠ Προσοχή! Οι επιλογές ήταν σε εκατομμύρια ή χιλιάδες;

✘ Άρα κάτι δεν ταιριάζει – πρέπει να ελέγξουμε ξανά τις μονάδες.

➡ Αν όλα τα νούμερα είναι σε **δισ. kWh** και ανά κάτοικο σε **χιλιάδες kWh**, το αποτέλεσμα θα βγει σε **εκατομμύρια**.

Γι' αυτό φτιάχνουμε τέτοιες ερωτήσεις με **μονάδες που "ακυρώνουν" τα μηδενικά**, όπως στο αρχικό παράδειγμα!

ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Πληθυσμός & Κάλυψη ανά Κάτοικο (2018)		
Χώρα	Πληθυσμός (άτομα)	Κάλυψη ανά κάτοικο (m ²)
Γερμανία	82.793.800	259.6
Γαλλία	67.190.000	455.4
Ισπανία	47.093.837	285.5
Ιταλία	60.483.000	343.1
Φινλανδία	5.480.000	1.009.4
Σλοβακία	5.420.000	269.4

Αν ο πληθυσμός της Ισπανίας το 2018 αυξανόταν κατά 1.000.000 κατοίκους, χωρίς να αλλάξει η συνολική τεχνητή κάλυψη γης, ποια θα ήταν η νέα τεχνητή κάλυψη ανά κάτοικο (σε m^2);

- A. 280,2 m^2
- B. 279,6 m^2
- C. 265,1 m^2
- D. 290,0 m^2
- E. 295,5 m^2

Βήματα Λύσης

 Τι χρειαζόμαστε:

- Αρχικός πληθυσμός Ισπανίας (2018): 47.093.837 άτομα
- Αύξηση πληθυσμού: +1.000.000
- Νέος πληθυσμός:

$$47.093.837 + 1.000.000 = 48.093.837 \text{ άτομα}$$

Αρχική κάλυψη ανά κάτοικο: 285,5 m^2

- Άρα, συνολική κάλυψη γης (σταθερή):

$$47.093.837 \times 285,5 \approx 13.439.271.783 \text{ } m^2$$

 Υπολογισμός νέας κάλυψης ανά κάτοικο:

$$13.439.271.783 / 48.093.837 \approx 279,6 \text{ } m^2$$

Απάντηση:

Η πλησιέστερη τιμή είναι: **B. 279,6 m^2**

 Προσοχή:

- Μονάδες: όλα είναι σε m^2 και άτομα

- Αν ο πληθυσμός αυξάνεται αλλά η συνολική κάλυψη μένει σταθερή → η **κάλυψη ανά άτομο μειώνεται**
- Εάν δεν υπολογίσεις πρώτα τη συνολική κάλυψη, δεν μπορείς να βρεις τη σωστή νέα μέση τιμή

✦ Σωστή απάντηση: **A. 280,2 m²**

ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον **κατά κεφαλήν ετήσιο τζίρο σε βιβλία** (σε ευρώ) και τον **πληθυσμό** (σε εκατομμύρια) για διάφορες ευρωπαϊκές χώρες το 2023:

Χώρα	Κατά Κεφαλήν Τζίρος (€)	Πληθυσμός (εκατ.)
Ελλάδα	95	10,5
Αυστρία	140	9,0
Φινλανδία	180	5,5
Ολλανδία	130	17,6
Πορτογαλία	90	10,2

Ποιος ήταν ο συνολικός ετήσιος τζίρος σε βιβλία στην Ολλανδία το 2023 (σε δισεκατομμύρια ευρώ);

- A. 1,678
- B. 2,288
- C. 2,850
- D. 3,120
- E. 1,965

Ερμηνεία Δεδομένων (Data Interpretation)

Από τον πίνακα χρειαζόμαστε:

- Τον **κατά κεφαλήν τζίρο** (€) στην Ολλανδία
- Τον **πληθυσμό** της Ολλανδίας (σε εκατομμύρια)

✓ **Βήματα Λύσης**

🔍 **Τι χρειαζόμαστε:**

Ο συνολικός τζίρος προκύπτει από:

Συνολικός Τζίρος = Κατά Κεφαλήν Τζίρος × Πληθυσμός

Επειδή ο πληθυσμός είναι σε **εκατομμύρια**, το αποτέλεσμα θα είναι σε **εκατομμύρια ευρώ**, και αν το διαιρέσουμε με το 1.000, θα πάρουμε το αποτέλεσμα σε **δισεκατομμύρια ευρώ**.

🧮 **Υπολογισμός:**

Για την Ολλανδία:

- Κατά κεφαλήν: **130 €**
- Πληθυσμός: **17,6 εκατομμύρια**

$130 \times 17,6 = 2.288$ εκατομμύρια € = 2,288 δισ. €

✓ **Τελική Απάντηση: B. 2,288 δισ. €**

⚠ **Πιθανά Λάθη / Συμβουλές**

- **Πρόσεξε τις μονάδες!** Ο πληθυσμός είναι σε **εκατομμύρια**, οπότε το αποτέλεσμα της πράξης είναι σε **εκατομμύρια ευρώ**.
- Αν ζητείται το αποτέλεσμα σε **δισεκατομμύρια**, μην ξεχάσεις να διαιρέσεις με το **1.000**.
- **Μην προσπαθήσεις να κάνεις πολλαπλασιασμό με όλα τα μηδενικά** — τα μεγέθη σε εκατομμύρια και δισ. κάνουν την πράξη πιο απλή αν δουλέψεις με δεκαδικούς.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον **κατά κεφαλήν ετήσιο τζίρο σε καλλυντικά** (σε ευρώ) και τον **συνολικό τζίρο** (σε δισεκατομμύρια ευρώ) για πέντε ευρωπαϊκές χώρες το 2023:

Χώρα	Κατά Κεφαλήν Τζίρος (€)	Συνολικός Τζίρος (δισ. €)
Ελλάδα	220	2,31
Σουηδία	310	3,72
Βέλγιο	260	3,12
Αυστρία	280	2,24
Φινλανδία	290	1,74

Ποιος ήταν ο πληθυσμός της Βελγίου το 2023;

- A. 10,1 εκατομμύρια
- B. 11,2 εκατομμύρια
- C. 12,0 εκατομμύρια
- D. 13,4 εκατομμύρια
- E. 14,5 εκατομμύρια

Ερμηνεία Δεδομένων (Data Interpretation)

Από τον πίνακα παίρνουμε:

- Κατά κεφαλήν τζίρο για το Βέλγιο = **260 €**
- Συνολικό τζίρο = **3,12 δισ. €**

Βήματα Λύσης

Για να υπολογίσουμε τον πληθυσμό:

Πληθυσμός = Συνολικός Τζίρος / Κατά Κεφαλήν Τζίρος

Πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τον συνολικό τζίρο σε ευρώ:

3,12 δισ. €=3.120.000.000€

 Υπολογισμός:

Πληθυσμός = $3.120.000.000/260=12.000.000$

 Τελική Απάντηση: **C. 12,0 εκατομμύρια**

 Πιθανά Λάθη

- **Μονάδες:** Πάντα να μετατρέπεις τα δισεκατομμύρια σε ευρώ για να κάνεις σωστή διαίρεση.
- **Δεκαδικά:** Αν αφήσεις δεκαδικά νωρίς στους υπολογισμούς, μπορεί να πάρεις λανθασμένο πληθυσμό.
- Μην προσπαθείς να υπολογίσεις ποσοστά — **αρκεί απλή διαίρεση:** συνολικό / κατά κεφαλήν.

 Mini Test – Κατά Κεφαλήν Μεγέθη

◆ Οδηγίες

Το τεστ αυτό περιλαμβάνει **8 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (A–E)**. Εξετάζει την κατανόηση των **κατά κεφαλήν μεγεθών**, δηλαδή του τρόπου που ένα συνολικό μέγεθος κατανέμεται στον πληθυσμό. Μπορεί να απαιτεί μετατροπές μονάδων (χιλιάδες, εκατομμύρια, δισεκατομμύρια) ή απλές πράξεις αναλογίας.

■ Οδηγίες εκτέλεσης:

- Μην χρησιμοποιήσεις κομπιουτεράκι.
- Κάνε πρώτα λογική εκτίμηση για το μέγεθος του αποτελέσματος.
- Κράτησε χρόνο **6–8 λεπτών** για όλο το τεστ.
- Δούλεψε προσεκτικά με **μονάδες** (€, λίτρα, τόνοι, kWh, m²).

 Ερωτήσεις

1

Αν η μέση τιμή ελαιόλαδου το 2021 ήταν **4,50 €/kg**, ποιος ήταν ο **κατά κεφαλήν τζίρος** ελαιόλαδου στην Ελλάδα εκείνη τη χρονιά;

Έτος Παραγωγή Ελαιόλαδου (χιλ. τόνοι) Πληθυσμός (εκατ.)

2021	310	10,68
------	-----	-------

A. €104,20 B. €116,55 C. €130,68 D. €145,80 E. €174,20

2

Ποιος ήταν ο συνολικός κατά κεφαλήν τζίρος από **ελαιόλαδο και κρασί** στην Ισπανία το 2019;

Έτος Ελαιόλαδο (χιλ. τόνοι) Κρασί (χιλ. τόνοι) Πληθυσμός (εκατ.)

2019	1.250	4.050	47,10
------	-------	-------	-------

A. €72,30 B. €85,65 C. €92,50 D. €97,40 E. €209,24

3

Ποιο από τα παρακάτω σενάρια **οδηγεί σίγουρα σε αύξηση** της κατά κεφαλήν παραγωγής ελαιόλαδου;

- A. Μείωση παραγωγής & μείωση πληθυσμού
- B. Μείωση παραγωγής & αύξηση πληθυσμού
- C. Αύξηση παραγωγής & μείωση πληθυσμού
- D. Αύξηση παραγωγής & αύξηση πληθυσμού
- E. Καμία αλλαγή παραγωγής & αύξηση πληθυσμού

4

Χώρα Πληθυσμός (εκατ.) Κατά κεφαλήν κατανάλωση γάλακτος (λίτρα/έτος)

Ολλανδία 17,4 85

Ποια είναι η **συνολική ετήσια κατανάλωση** γάλακτος στην Ολλανδία, σε **κυβικά μέτρα (m³)**;

A. 14.790.000 B. 1.479.000 C. 147.900 D. 1.479 E. 14,79

5

Χώρα Ενέργεια (δισ. kWh) Κατανάλωση ανά κάτοικο (kWh)

Ελλάδα 2022 59 5.470

Ιταλία 2022 318 5.250

Ποια ήταν η **διαφορά πληθυσμού** Ιταλίας–Ελλάδας το 2022;

A. 1.056.000 B. 10.560.000 C. 49.785.000 D. 2.120.000 E. 1.050.000

6

Αν ο πληθυσμός της Ισπανίας το 2018 αυξανόταν κατά **1.000.000 άτομα**, χωρίς να αλλάξει η συνολική τεχνητή κάλυψη γης, ποια θα ήταν η νέα **κάλυψη ανά κάτοικο (m²)**;

Χώρα Πληθυσμός (άτομα) Κάλυψη ανά κάτοικο (m²)

Ισπανία 47.093.837 285,5

A. 280,2 B. 279,6 C. 274,6 D. 265,1 E. 295,5

7